El paraíso de George Cantor

(Las matemáticas que nunca te dije)

* * * * *

Ignacio J. Álvarez Cañas

NAU llibres

Nau Llibres

Periodista Badía 10. 46010 València
Tel.: 96 360 33 36
Fax: 96 332 55 82
E-mail: nau@naullibres.com
web: www.naullibres.com

Diseño de cubierta y maquetación:
Pablo Navarro y Artes Digitales Nau Llibres

Ilustración de la cubierta:
Ignacio J. Álvarez Cañas

ISBNs Nau Llibres

ISBN_papel: 978-84-7642-998-3
Depósito Legal: V-1465-2016

Impresión: Safekat

A Emi

A Iñaki y a Mario

Índice

Prólogo

Este libro está dedicado a mis alumnos y alumnas, porque son capaces de provocar en mí el deseo de invertir el esfuerzo y el tiempo necesarios para trasmitir el amor a las matemáticas. Seguramente, con dedicación, somos capaces de hacerlo, pero solo con amor somos capaces de aprender y solo con entusiasmo podemos avanzar en el camino del conocimiento.

Este libro está dedicado a ti, son artículos que ya has leído en alguna ocasión y que he publicado en la página de Facebook que compartimos: *Cajón Matemático* y en el Blog: *Cajón Matemático: Los artículos que nunca te dije*. Te los he contado para despertar en ti el deseo de conocer más allá de los números y las letras, para despertar en ti el deseo de pensar y acabar descubriendo que las matemáticas son atractivas y que son algo más que una disciplina.

Necesitamos, como decían los griegos clásicos, olvidar siete veces para aprender. Necesitamos mucha ilusión para enseñar y la ilusión no se improvisa ni nace con nosotros. A lo largo de nuestra vida aprendemos a descubrirla en las pequeñas cosas, y en los grandes retos, pero una cosa que nos encontramos en el camino, si estamos atentos, es la curiosidad. La curiosidad nos ayuda a triunfar, a descubrir más allá de nosotros mismos, construyendo así lo esencial del ser humano: el deseo de aprender.

Quiero trasmitiros, alumnos y alumnas, la importancia de hacer las cosas con entusiasmo y esfuerzo, con alegría y paciencia, para ver que al final todo se consigue cuando hay perseverancia: entusiasmo, esfuerzo y perseverancia, un trinomio que os conducirá al éxito en cualquier campo de la vida en el que os mováis.

Decía Picasso: *la inspiración existe, pero tiene que encontrarte trabajando*. En el campo de la Ciencia existe un 5% de talento, un 5% de casualidad (serendipia) y un 90% de trabajo constante.

Dijo Pasteur que e*n el campo de la investigación el azar no favorece más que a los espíritus preparados*.

Trabajo, trabajo y trabajo

Con una enseñanza de calidad buscamos diseñar un mundo de excelencia, buscamos favorecer a los espíritus brillantes para que sean el espejo en el que se miren los demás; sin embargo, sin esfuerzo no se consigue nada. El esfuerzo en el aprendizaje te llevará a ser más inteligente, a conocer más cosas y, algo no menos importante, a ser mejor persona, para llegar a ser mejor ciudadano y más útil a la sociedad. El espíritu brillante significa mucho más que obtener buenas notas, pero recuerda que tener un espíritu brillante te liga para siempre a la humildad.

No olvides nunca que algo más importante que *saber* es *aprender a saber*, ser autónomo, y esa autonomía te dejará un *poso* que no será más que la propia sabiduría que te irá

1 El método de los babilonios

El método de Newton es un método numérico que se utiliza para el cálculo aproximado de las soluciones de una ecuación. Un caso particular es el *método de los babilonios*, método que utilizaban estos para calcular las raíces cuadradas cuando todavía no se había inventado el algoritmo que nos permite obtener la raíz cuadrada no exacta con tantos decimales de aproximación como queramos.

Supongamos que queremos calcular $\sqrt{a}$, *con* $a > 1$. Tomamos $c_0 = a$ y construimos la sucesión recurrente:

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}\left(c_n + \frac{a}{c_n}\right), \quad \forall n \geq 0 .$$

Es decir, el primer valor calculado sería

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{a}\right) = \frac{1}{2}(a+1),$$

el segundo

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(c_1 + \frac{a}{c_1}\right)$$

y, así, sucesivamente.

Ejemplo:

Para calcular la $\sqrt{2} = 1.414213562...$ (aproximando con 6 decimales):

$$c_0 = 2$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(c_1 + \frac{a}{c_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = 1.416667$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\left(c_2 + \frac{a}{c_2}\right) = \frac{1}{2}\left(1.416667 + \frac{2}{1.416667}\right) = 1.414216$$

Obsérvese que este último valor coincide con el valor exacto de la $\sqrt{2}$ en las 5 primeras cifras decimales.

Aplicación:

Una aplicación de este método la podemos encontrar en el proyecto de la Catedral de Milán (siglo XIV).

Se recurrió a un matemático de la época, llamado Stornaloco, para que obtuviera el valor aproximado de la $\sqrt{3}$, pues en principio se pensó construirla inscrita en un cuadrado, pero hubo polémica sobre su seguridad, con lo que, finalmente, se diseñó inscrita en un triángulo equilátero, cuya altura es:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

2 | El método de reducción al absurdo y la irracionalidad de algunos números

1. La $\sqrt{2}$ es un número irracional

Veamos, en primer lugar, que la $\sqrt{2}$ es un número irracional (son aquellos que tienen infinitas cifras decimales no periódicas).

En efecto, supongamos, por reducción al absurdo, que $\sqrt{2}$ no es un número irracional (lo contrario de lo que queremos demostrar) y vamos a llegar a una contradicción. Entonces, debe ser racional, por lo que debe ser un fracción, que podemos suponer que es irreducible, luego $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, siendo esta fracción irreducible.

Elevando al cuadrado $2 = \frac{p^2}{q^2} \to p^2 = 2q^2$ (1)

luego, p^2 *es par* $\to p$ *es par* $\to p = 2n$

y sustituyendo en (1):

$$(2n)^2 = 2q^2 \to 4n^2 = 2q^2 \to q^2 = \frac{4n^2}{2} = 2n^2 \to$$

$$q^2 \text{ es par} \to q \text{ es par} \to q = 2m$$

Por lo tanto: $\frac{p}{q}=\frac{2n}{2m}$, fracción que claramente es reducible, lo que supone una contradicción, luego $\sqrt{2}$ es un número irracional.

2. El número de oro o proporción áurea

Llamamos Número Áureo o Número de Oro al número φ que se obtiene de resolver la ecuación de segundo grado siguiente:

$$\varphi^2-\varphi-1=0\,.$$

Veamos de dónde sale esta ecuación.

Una sucesión de Fibonacci es una sucesión en la que, dados dos primeros términos, cada uno de los siguientes se obtiene sumando los dos términos anteriores. Dependiendo de qué dos términos cojamos de partida podemos construir infinitas sucesiones de Fibonacci (cualquiera de ellas nos sirve para construir el Número Áureo). Por ejemplo:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_1=1\\
&\varphi_2=1\\
&\varphi_3=\varphi_1+\varphi_2=1+1=2\\
&\varphi_4=\varphi_2+\varphi_3=1+2=3\\
&\varphi_5=\varphi_3+\varphi_4=2+3=5\\
&\varphi_6=\varphi_4+\varphi_5=3+5=8\\
&\ldots
\end{aligned}$$

En general: $\varphi_{n+1}=\varphi_{n-1}+\varphi_n$.

3 | Los números primos y la intuición matemática

0. Introducción

Es complicado obtener una fórmula o un método de localización de los números primos. Los primeros números primos se obtienen de forma sencilla pero, a medida que vamos queriendo obtener más números primos, el proceso se vuelve engorroso y complicado.

Este problema se plantea en el entorno del Teorema Fundamental de la Aritmética (fue estudiado por vez primera por Euclides), que afirma que todo número compuesto se puede factorizar de forma única en producto de números primos.

Así, para comprobar si un número es primo, basta con dividir sucesivamente entre 2, 3, 5, 7, 11,..., hasta llegar a la raíz cuadrada de dicho número:

> Si un número entero mayor que 1 no tiene divisores primos menores o iguales que su raíz, entonces es primo.

santes relacionados con esta cuestión, que pasamos a tratar a continuación.

Euler demostró que la suma de los inversos de todos los números primos $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots$ es una cantidad infinita.

Por otra parte, si la suma de los inversos de todos los pares gemelos fuese infinita, como le sucede a la suma (llamada suma armónica): $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ que también se demuestra que es infinita, entonces no podría haber un número finito de pares, ya que toda suma finita tiene por resultado siempre una cantidad finita. De esta forma, podríamos afirmar que tendríamos una cantidad infinita de dichos pares. Pero, por el contrario, a esta suma le sucede lo mismo que le sucede a la suma $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\ldots$ que es finita, como enunciamos en la siguiente

Propiedad: "La suma de los inversos de todos los números primos gemelos es una constante finita que recibe el nombre de Constante de Brun y se representa en su honor por B_2":

$$B_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\ldots$$

8 | El paraíso de Cantor: Un alucinante viaje por el infinito

> Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.
>
> David Hilbert, 1926.

Parte 1

La atractiva y apasionante idea de *infinito* siempre ha suscitado polémica, haciendo invertir innumerables horas de trabajo a los matemáticos más notables de la historia, sobre todo a los de estos dos últimos siglos. Ha estado cargada de matices teológicos por la propia idea en sí: lo desconocido, lo indescriptible, lo inalcanzable favorecía las elucubraciones conceptuales más imaginativas en su momento.

Uno de los matemáticos que más ha contribuido a la formalización y estudio de este concepto es George Cantor (1845-1918). Cantor nació en San Petersburgo y cursó estudios de matemáticas en Alemania. Dedicó su vida entera a la docencia y a la investigación, llegando, incluso, a ocupar una plaza de profesor de Filosofía, hecho nada sorprendente reales entre el 0 y el 1 como números reales en su totalidad. A este cardinal lo llamó: χ_1 . Por tanto:

$$\text{Card } [0,1] = \text{Card } \mathbb{R} = \chi_1 .$$

Demostró, entonces, que el cardinal de un conjunto A es menor que el cardinal del conjunto de las Partes de A: $\wp(A)$ (conjunto de todos los subconjuntos que se pueden formar con sus elementos). Es decir:

$$\text{Card } (A) < \text{Card } (\wp(A)).$$

Con este resultado, Cantor obtenía una sucesión creciente e infinita de números infinitos: *los números transfinitos* (χ_0 , ..., χ_1 , ...). Cantor formulaba, entonces, la siguiente cuestión: ¿existe algún número transfinito entre χ_0 y χ_1?, cuestión que jamás ningún matemático llegó a resolver, a pesar de los intentos que se hicieron para conseguirlo.

Este no era el primer problema planteado en la historia que "no tenía solución". Recuérdense los problemas, propuestos por los griegos, que durante dos mil años se intentaron resolver sin encontrar solución alguna, y que en el siglo XIX se demostró que son construcciones lógicamente imposibles:

- Dividir un ángulo cualquiera con regla y compás en tres partes iguales.
- Construir un cubo de doble volumen que el volumen de un cubo dado.
- Construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado (cuadratura del círculo).

Un matemático de tan solo veinticinco años de edad, llamado Kurt Gödel (1906-1978), publicó un trabajo sobre uno de los resultados más impresionantes e importantes sobre lógica que se han obtenido en este siglo, y supuso un

9 | Acerca de la definición de Caos

1. Definición del Caos

Caos es el comportamiento imprevisible a largo plazo que se puede dar en sistemas deterministas. Modelos de comportamientos caóticos podemos encontrar en la trayectoria que sigue una de las Lunas de Saturno (Hiperión), en los posibles movimientos que siguen dos bolas al ser golpeadas por una tercera, en el movimiento de un copo de nieve en una ventisca, en el comportamiento de las moléculas de cualquier gas, la predicción del tiempo que nos da la Meteorología está basada completamente en esta teoría... Todos ellos reciben el nombre de Sistemas Dinámicos, y en estos, entenderemos el concepto de Caos asociado al de impredecibilidad.

En este capítulo nos ocuparemos de los Sistemas Dinámicos Discretos, es decir, aquellos que se configuran mediante el procedimiento iterativo que resulta de aplicar reiteradamente la actuación de una función sobre un punto. A continuación plantearé algunas definiciones básicas e importantes en Teoría del Caos, intentando ser lo más intuitivo posible,

2. Algunos ejemplos de funciones caóticas en Caos Unidimensional

A continuación planteamos dos funciones caóticas, definidas en el intervalo $[0,1]$.

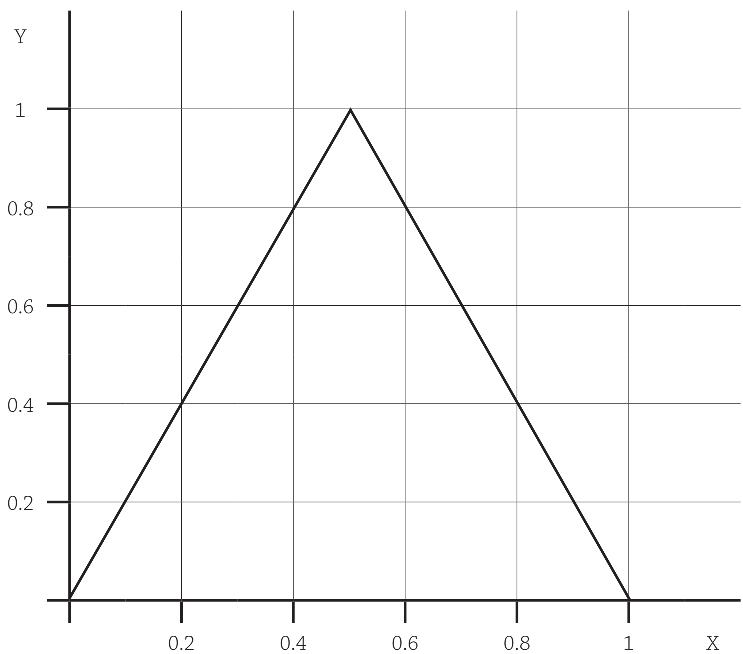
2.1. La función Tienda

Consideremos la función

$$T:[0,1]\rightarrow[0,1],$$

definida como sigue

$$T(x)=\begin{cases}2x & si \quad x\in[0,1/2]\\ 2-2x & si \quad x\in\,]1/2,1]\end{cases}$$

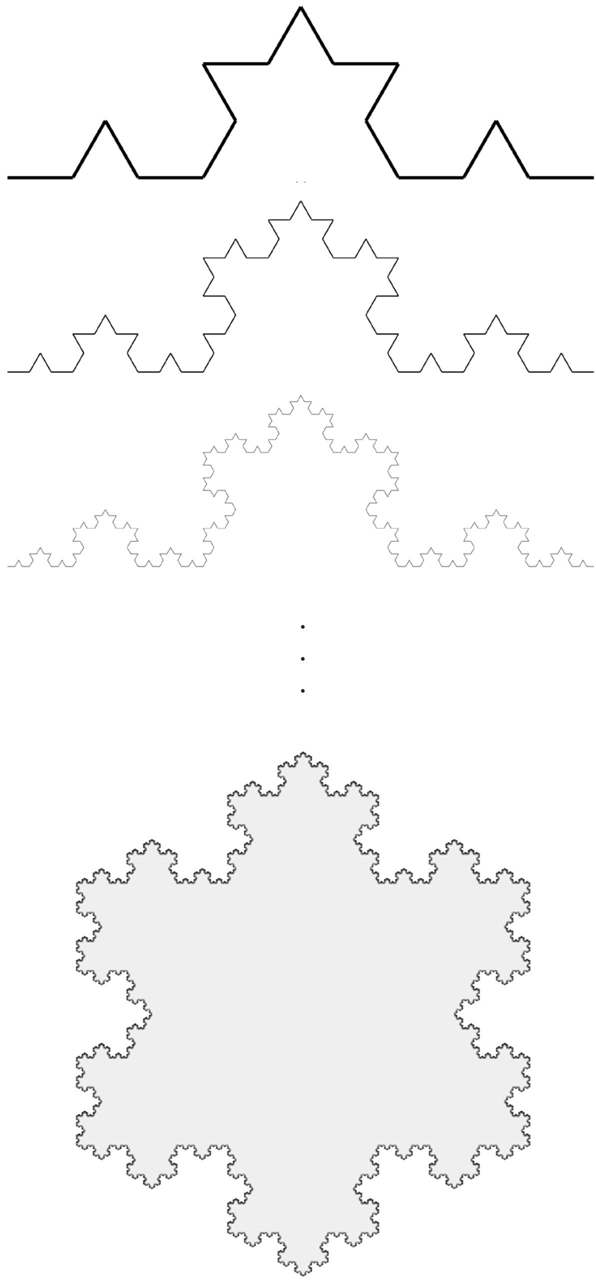


10 | Conjuntos Fractales: Monstruos Matemáticos

El término "fractal" se lo debemos al matemático Benoît Mandelbrot (1975). Se trata de un objeto geométrico cuya estructura básica se repite a diferentes escalas. Dicho término viene a definir el objeto final que se obtiene mediante un proceso geométrico elemental y repetitivo bien especificado.

Es decir, se trata de una iteración infinita que nos reporta una estructura final de una complicación extraordinaria. Como dice Pla i Carrera (1994), "si en una circunferencia ampliamos más y más su radio nos acercamos a una recta. En una curva –o en una superficie fractal–, por el contrario, por más y más que ampliemos un elemento siempre nos encontramos con la misma curva y con su misma complejidad. En palabras llanas un objeto fractal es aquel que es recursivamente complejo".

Un hecho a resaltar, que determina la importancia que tiene la geometría fractal, es que esta constituye un enlace entre la Geometría Clásica y el Análisis Matemático. Además, los fractales son modelos geométricos de estructuras que se encuentran en la naturaleza, como por ejemplo: la



11 Más conjuntos numéricos: Los números complejos y los muy complejos

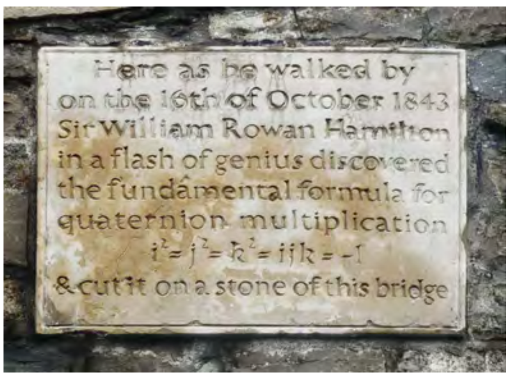
0. Introducción

William Rowan Hamilton (1805-1865) fue un matemático-físico irlandés que buscaba formas de extender los números complejos a objetos con un número mayor de dimensiones (nótese que los números complejos pueden ser tratados como puntos de un plano, lo que sugiere pasar a puntos del espacio). No pudo hacerlo con éxito para 3 dimensiones, con una generalización natural de los números complejos (i y j, como unidades imaginarias), lo que le condujo a la consideración de una tercera unidad imaginaria, k, y pasó a trabajar en 4 dimensiones, definiendo con ello los números hipercomplejos, que llamó *Cuaterniones*.

El propio Hamilton contó que la solución al problema que tenía planteado se le ocurrió un día paseando con su esposa (1843), momento en el que grabó en el lateral del puente de Brougham (Dublín) la solución que le llevaría a resolver su problema. Esta solución estaba fundamentada en las expresiones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$$

Hamilton dio a conocer los cuaterniones con algunos libros que publicó. El último, que se llamaba *Elements of Quaternions* (Elementos de Cuaterniones), constaba de 800 páginas y fue publicado después de su muerte.



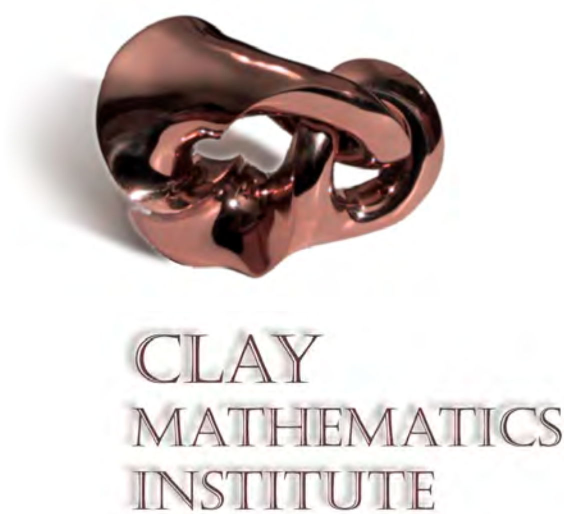
Placa conmemorativa que se encuentra en el puente de Brougham de Dublín, en la que aparece la inscripción:

"Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$".

Por lo tanto, los números hipercomplejos reciben ese nombre por alcanzar, en cierta forma, un grado más en la *complejidad* de los números complejos, es decir, se trata de un conjunto numérico formado por números *más complejos*.

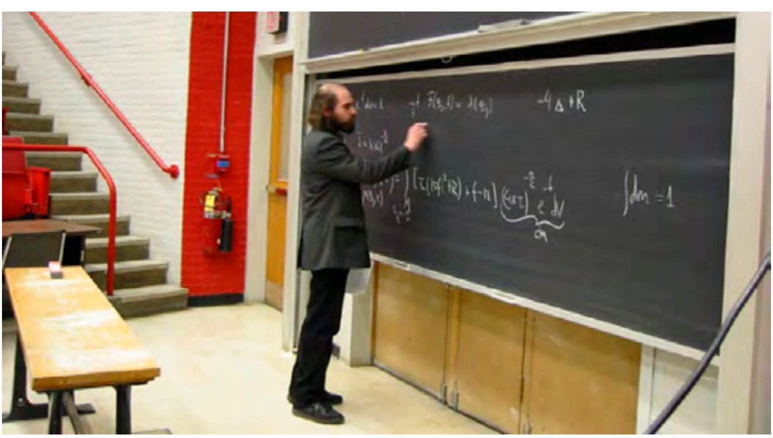
13 | Los siete problemas del milenio

A continuación, podemos leer dos artículos interesantes sobre la recompensa que el Instituto Clay ofreció a principio del milenio por resolver alguno de los “Siete problemas del milenio”, emulando lo que el matemático David Hilbert hizo en el siglo anterior.



o 10 años, luchando por su vida y cuidándolo día y noche. Por fin, el niño sanó, creció, es fuerte y hermoso; pero te lo quieren robar y te lo secuestran. Para Grisha fue como un secuestro cuando trataron de apropiarse del resultado de su trabajo. No pudo aceptar que un teorema pudiera ser comprado, vendido o robado".

» Grigori Perelman nace el 13 de junio de 1966 en Leningrado (actual San Petersburgo).
» A los 14 años ingresa en la Escuela 239 de Leningrado para jóvenes talentos.
» En 1982 obtiene la medalla de oro en las olimpiadas de matemáticas como miembro del equipo de la URSS.
» En 1996 rechaza el premio de la Sociedad Matemática Europea para jóvenes matemáticos.
» En 2002 resuelve la conjetura de Poincaré.
» En 2005 renuncia a su puesto en el Instituto Steklov.
» En agosto de 2006 rechaza la medalla Fields, considerada el Nobel de las Matemáticas.
» En marzo de 2010 no acepta el premio de un millón de dólares que le concede el instituto Clay de Matemáticas.



14 El desastre del puente de Tacoma

(Del libro “Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones”, M. BRAUN)

1ª Parte

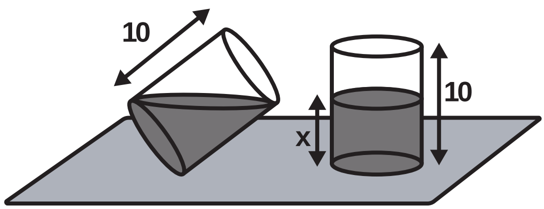
El 1 de julio de 1940 se terminó y abrió al público el Puente del Estrecho de Tacoma, en Puget Sound, Washington, Estados Unidos. Desde el día de su inauguración el puente empezó a presentar oscilaciones verticales y muy pronto fue bautizado como la “yegua galopante”. Aunque parezca extraño, debido a su comportamiento tan peculiar, el tránsito sobre el puente aumentó considerablemente. La gente viajaba cientos de kilómetros en sus vehículos para disfrutar de la curiosa emoción de transitar sobre un puente que se estremecía. El puente fue un gran negocio por un lapso de cuatro meses. Conforme pasaban los días, las autoridades responsables iban adquiriendo más confianza acerca de la seguridad del puente, hasta llegar a pensar, incluso, en la cancelación de su póliza de seguro.

Aproximadamente a las 7 de la mañana del 7 de noviembre de 1940, el puente comenzó a vibrar en forma persistente depende de la forma y el tamaño de la estructura, así como de la velocidad de la corriente. Debido a que los vórtices se separan en forma alternada hacia cada uno de los lados del obstáculo, este se ve afectado por una fuerza periódica perpendicular a la dirección de la corriente y de una magnitud igual a $F_0 \cdot \cos(at)$. El coeficiente F_0 depende de la forma de la estructura. Cuanto menos aerodinámica sea esta, tanto mayor será el coeficiente F_0 y, por tanto, la amplitud de la fuerza. Por ejemplo, el flujo de aire alrededor de un ala de avión con ángulo de ataque pequeño es muy regular, de modo que la cauda de vórtices no está bien definida y el coeficiente F_0 es muy pequeño.

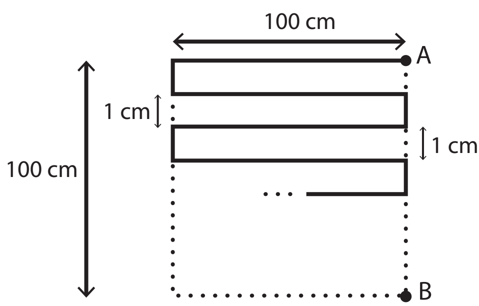
15 | Problemas para desvelarse

1. En la orilla de un río hay una oveja, un zorro y una lechuga, y una barca en la que caben solo el barquero y uno de los elementos. ¿Cómo puede el barquero pasarlos a la otra orilla sin que ninguno de ellos se coma al otro?
2. La tela de araña: Una araña teje su tela en el marco de una ventana. Cada día duplica la superficie hecha hasta entonces. De esta forma tarda 30 días en cubrir el hueco de la ventana. Si en vez de una araña, fueran dos, ¿cuánto tardarían en cubrir dicho hueco?
3. Hay 3 cajas, una contiene tornillos, otra tuercas y la otra clavos. La persona que ha puesto las etiquetas de lo que contenían se ha confundido y no ha acertado en ninguna. Abriendo una sola caja y sacando una sola pieza, ¿cómo se puede conseguir poner a cada caja su etiqueta correcta?
4. Si un ladrillo pesa 1 kg más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?

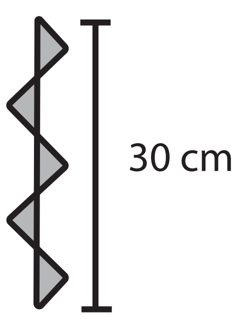
P14) Un vaso cilíndrico de 10 cm de altura está parcialmente lleno de agua. En la figura lo puedes ver en dos posiciones. ¿Cuál es la altura x del agua cuando el vaso está en posición vertical?



P15) ¿Cuál es la longitud total de la línea poligonal AB si la dibujamos completa?



P16) En la figura de abajo se puede ver una cenefa formada por 5 triángulos isósceles de la misma medida. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



16 Literatura, Cine y Matemáticas

A continuación propongo una lista de libros y películas recomendadas, que guardan una estrecha relación con las Matemáticas, para contribuir a una formación en esta materia, desde una perspectiva más amplia. Con ella se pretende despertar el interés y la afición por este conocimiento, a través de la Literatura y el Cine, dos complementos convenientes e indispensables que nos llevarán a observar una imagen más cercana, útil y atractiva del maravilloso *Mundo de los Números*.

1. Libros

Barrow, J. D. (1997). *¿Por qué el mundo es matemático?* Barcelona: Grijalbo.

Garciadiego, A. R. y Carpio, E. M. (2011). *Uno, dos, tres..., y más allá*. Madrid: Nivola.

Gardner, M. (2009). *¡Ajá! Inspiración*. Barcelona: RBA.

Hofstadter, D. R. (2007). *Godel, Escher, Bach. Un Eterno y Grácil Bucle*. Barcelona: Tusquets Editores.

Mataix, S. (2002). *Lee a Julio Verne. El amor en los tiempos de la criptografía.* Barcelona: Rubes.

Odifreddi, P. (2007). *Pluma, Pincel y Batuta. Las tres envidias del matemático.* Madrid: Alianza.

Stewart, I. (2010). *Cartas a una joven matemática*. Barcelona: Crítica.

2. Películas

Alicia en el país de las maravillas

Título original:	Alice in Wonderland
Año:	2010
Duración:	108 min
País:	Estados Unidos
Director:	Tim Burton
Reparto:	Mia Wasikowska, Johnny Depp, Helena Bonham Carter, Anne Hathaway, Crispin Glover, Matt Lucas, Marton Csokas, Tim Pigott-Smith, Lindsay Duncan, Geraldine James, Frances de la Tour, Jemma Powell, John Hopkins, Eleanor Gecks, Eleanor Tomlinson

Alicia, una joven de 19 años, acude a una mansión para asistir a una fiesta de la alta sociedad. Cuando está a punto de recibir públicamente una propuesta de matrimonio sale corriendo tras un conejo blanco, que la lleva a un lugar enigmático y curioso llamado el País de las Maravillas, lugar que había visitado diez años antes, pero que ya no recordaba. Ese país era un reino pacífico hasta que la Reina Roja derrocó a su hermana, la Reina Blanca, y entonces las criaturas que viven en él están dispuestas a rebelarse y esperan contar con el apoyo de Alicia, a la que ayudarán a recordar su primera visita al fantástico reino. Dicha obra está basada en la homó-

Bibliografía

Álvarez, I. J. (1998). *Sistemas dinámicos discretos caóticos. Acerca de la redundancia en la definición de Caos de Devaney* (Tesina de Licenciatura). Universitat de València.

—— (2003). *Sobre el teorema de Gödel* (Tesis Doctoral). Michigan: ProQuest.

—— (2013). *Cinco tardes con Derive*. Valencia: Gerüs Creaciones.

Apóstol, T. M. (1998). *Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté.

Braun, M. (1990). *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Burgos, J. (1993). *Álgebra Lineal*. Madrid: McGraw Hill.

Casanellas, M. *et al.* (2013). *Matemáticas del planeta Tierra*. Madrid: SM.

Devaney, R. L. (1987). An introduction to chaotic dynamical systems. *American Mathematical Society*, 16(2), 313-315.

Dunham, W. (2006). *Euler. El maestro de todos los matemáticos*. Madrid: Nivola.

Gardner, M. (2009). *¡Ajá!: Paradojas que hacen pensar*. Barcelona: RBA.

Gray, J. J. (2005). *El reto de Hilbert*. Barcelona: Crítica.

Llorens, J. L. (1995). *Introducción al uso del Derive. Aplicaciones al Álgebra y al Cálculo*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

Mosterín, J. (2007). *Los lógicos*. Madrid: Espasa Calpe.

Nagel, E. y Newman, J. R. (2007). *El Teorema de Gödel*. Madrid: Tecnos.

Pla i Carrera, J. (1994). Los fractales. *Epsilon*, 10(1), 27-53.

Sánchez, L. M., Legua M. P. y Moraño, J. L. (2006). *Matemáticas con Derive*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

Smullyan, R. (2004). *¿La dama o el tigre? y otros pasatiempos lógicos*. Madrid: Editorial Cátedra.

—— (2007). *¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos*. Madrid: Cátedra.

Stewart, I. (2007) *¿Juega Dios a los dados?* Barcelona: Crítica.

Fuentes de Internet consultadas

El País.com

Wikipedia

Educación 3.0. Enero, 2016

Imágenes

Pág 17. Catedral de Milán. Fuente: wikimedia.org

Pág 72. Curva de Koch. Fuente: wikimedia.org

Pág. 74. Placa Hamilton, Dublín. Fuente: fondo propio.